

vitja.jurov@yandex.ru

О РЕКОНСТРУКЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА ПО АЧХ, ИЗМЕРЕННОЙ ВНЕ ОБЛАСТИ НАГРУЖЕНИЯ

Ватульян А.О., Юров В.О.

Южный математический институт ВЦ РАН, Владикавказ, Россия

22-24 ноября, 2023

Пусть тело занимает ограниченную область V с границей $S = S_u \cup S_f \cup S_\sigma$.

Уравнения колебаний имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

определяющие соотношения:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l}, \quad \text{или} \quad \sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

граничные условия

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_f} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = p_i \quad (3)$$

где n_j, p_j – компоненты единичного вектора внешней нормали к S и компоненты вектора внешней нагрузки. Область S_u – закреплена, S_f – свободна, на S_σ задана внешняя нагрузка.

УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ

▶ Анизотропный случай

c_{ijkl} – компоненты тензора упругих модулей (симметрия и положительная определенность), кусочно-непрерывные функции координат, ρ – плотность среды (также функция координат)

▶ Изотропный случай

λ, μ, ρ – функции координат

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Задача определения коэффициентов дифференциального оператора теории упругости

(Тип 1) Дополнительная информация о поле перемещений задается в области S_σ

(Тип 2) Дополнительная информация задается в области S_f .
(области S_σ и S_f не пересекаются)

$$u_i|_{S_f} = f_i(x, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \quad (4)$$

Нелинейность обратной задачи — итерационный процесс решения

- ▶ Начальное приближение
- ▶ Нахождение поправок
- ▶ Выход из итерационного процесса

БЕЗРАЗМЕРНАЯ ПОСТАНОВКА

Рассмотрим безразмерную постановку задачи (1)-(3)

$$\begin{aligned} & (g_1 U_{k,k} \delta_{ij} + g_2 (U_{i,j} + U_{j,i}))_{,j} + g_3 \kappa^2 U_i = 0, \quad i = 1, 2, 3; \\ & U_i|_{S_u} = 0, \quad (g_1 U_{k,k} \delta_{ij} + g_2 (U_{i,j} + U_{j,i})) n_j|_{S_f} = 0, \\ & (g_1 U_{k,k} \delta_{ij} + g_2 (U_{i,j} + U_{j,i})) n_j|_{S_\sigma} = P_i, \quad i = 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (5)$$

где $\lambda = g_1 \mu_0$, $\mu = g_2 \mu_0$, $\rho = g_3 \rho_0$, $\kappa^2 = \rho_0 \omega^2 d^2 \mu_0^{-1}$, $p_i = P_i \mu_0$,
 μ_0, ρ_0 – характерные значения модуля упругости и плотности,
 d – диаметр занимаемой телом области.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Разложение по формальному малому параметру ε :

$$U_i = U_{0i} + \varepsilon U_{1i} + \varepsilon^2 U_{2i} \dots, \quad g_k = g_{0k} + \varepsilon g_{1k} + \varepsilon^2 g_{2k} \dots \quad (6)$$

Задача при нулевой степени ε :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij,j}^{0,0} + g_{03} \kappa^2 U_{0i} &= 0, \quad i = 1, 2, 3. \\ U_{0i}|_{S_u} &= 0, \quad \Sigma_{ij}^{0,0} n_j \Big|_{S_f} = 0, \quad \Sigma_{ij}^{0,0} n_j \Big|_{S_\sigma} = P_i, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (7)$$

Задача при первой степени ε :

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij,j}^{0,1} + g_{03} \kappa^2 U_{1i} &= - \left[\Sigma_{ij,j}^{1,0} + g_{13} \kappa^2 U_{0i} \right], \\ U_i|_{S_u} &= 0, \quad \Sigma_{ij}^{0,1} n_j \Big|_{S_f \cup S_\sigma} = - \Sigma_{ij}^{1,0} n_j \Big|_{S_f \cup S_\sigma}, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Sigma_{ij}^{n,m} = (g_{n1} U_{mk,k} \delta_{ij} + g_{n2} (U_{mi,j} + U_{mj,i}))$$

СИСТЕМА ФУНКЦИЙ

Система нулевого порядка:

$$\varphi_0^{(0)} = 1$$

Система первого порядка:

$$\varphi_0^{(1)} = 1, \quad \varphi_1^{(1)} = x, \quad \varphi_2^{(1)} = y, \quad \varphi_3^{(1)} = z$$

СИСТЕМА ФУНКЦИЙ

Решение задачи (8) – представление правой части в виде разложения.

- ▶ Увеличение порядка аппроксимации поправок

$$g_{1k} = c_1^{0k} \varphi_0^{(0)}(x, y, z), \quad k = 1, 2, 3;$$

$$g_{1k} = \sum_{s=0}^N c_s^{1k} \varphi_s^{(1)}(x, y, z), \quad k = 1, 2, 3;$$

ПРИМЕР. ОЗ ДЛЯ СТЕРЖНЯ

Безразмерная форма уравнения установившихся колебаний:

$$\begin{aligned}(u'g)' + \kappa^2 r u &= 0 \\ u(0) = 0, \quad u'(1)g(1) &= 1\end{aligned}\tag{9}$$

где g, r, κ – безразмерные модуль упругости, плотность и частота колебаний.

Дополнительная информация:

$$u(x, \kappa)|_{x=\xi} = f(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]\tag{10}$$

где $\xi \in (0, 1)$.

- ▶ Точка съема амплитуды колебаний не совпадает с точкой нагружения

РЕШЕНИЕ ОЗ

- ▶ Итерационный процесс
- ▶ Шаг 1

Начальное приближение $g_0(x)$, $r_0(x)$ удовлетворяет следующей краевой задаче

$$\begin{aligned}(u_0' g_0)' + \kappa^2 r_0 u_0 &= 0 \\ u_0(0) &= 0, \quad u_0'(1) g_0(1) = 1\end{aligned}\tag{11}$$

и обеспечивает минимум нормы $\left\| u_0(x, \kappa)|_{x=\xi} - f(\kappa) \right\|$.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Линеаризация задачи (9)

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, \quad g = g_0 + \varepsilon g_1 + \dots, \quad r = r_0 + \varepsilon r_1 + \dots$$

При ε^0 очевидно получаем задачу (11). Задача при ε^1 будет иметь вид:

$$\begin{aligned} (u_1' g_0)' + \kappa^2 r_0 u_1 &= - (u_0' g_1)' - \kappa^2 r_1 u_0 \\ u_1(0) = 0, \quad u_1'(1) g_0(1) &= -u_0'(1) g_1(1) \end{aligned} \quad (12)$$

2 ПОДХОДА

Задачу (12) нельзя решить методом пристрелки так как она содержит неизвестную функцию в правой части.

ОЗ (тип 1) – Используется соотношение взаимности:

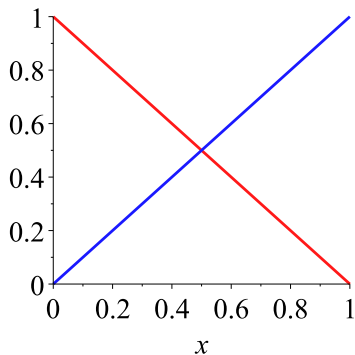
$$\int_0^1 \left[(u'g)' u_0 - (u_0'g_0)' u + \kappa^2 (r - r_0) uu_0 \right] dx = 0 \quad (13)$$

ОЗ (тип 2) – Параметризуем правую часть, путем разложения неизвестных поправок по системе функций $\varphi_s(x)$

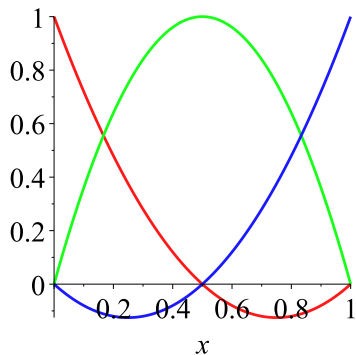
$$\varphi_s(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq s}}^N (x_k - x) \bigg/ \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq s}}^N (x_k - x_s), \quad (14)$$

где в качестве точек коллокации выбраны $x_k = \frac{k}{N}$

СИСТЕМА ФУНКЦИЙ



$N = 1$



$N = 2$

РАЗЛОЖЕНИЕ ПРАВОЙ ЧАСТИ

Функции неоднородности можно представить в виде разложений

$$g = \sum_{s=0}^N c_s^g \varphi_s(x), \quad r = \sum_{s=0}^N c_s^r \varphi_s(x)$$

в случае, когда g, r полиномы степени не выше N ,

Поправки (независимо от структуры g, r) будем искать в виде:

$$g_1 = \sum_{s=0}^N c_s^{\Delta g} \varphi_s(x), \quad r_1 = \sum_{s=0}^N c_s^{\Delta r} \varphi_s(x) \quad (15)$$

Неоднородная задача:

$$\begin{aligned} (u_1' g_0)' + \kappa^2 r_0 u_1 &= - \left(u_0' \sum_{s=0}^N c_s^{\Delta g} \varphi_s(x) \right)' - \kappa^2 u_0 \sum_{s=0}^N c_s^{\Delta r} \varphi_s(x) \\ u_1(0) &= 0, \quad u_1'(1) g_0(1) = -u_0'(1) \sum_{s=0}^N c_s^{\Delta g} \varphi_s(1) \end{aligned} \quad (16)$$

$$N = 1, N = 2$$

► Линейная и квадратичная аппроксимация для поправок
Конструкция функций (14) такова, что $\varphi_s(x_k) = \delta_{sk}$.

$$\delta_{sk} = \begin{cases} 1, & s = k \\ 0, & s \neq k \end{cases}$$

Используя это свойство, перепишем граничное условие в (16)

$$\begin{aligned} (u_1' g_0)' + \kappa^2 r_0 u_1 &= - \left(u_0' \sum_{s=0}^N c_s^{\Delta g} \varphi_s(x) \right)' - \kappa^2 u_0 \sum_{s=0}^N c_s^{\Delta r} \varphi_s(x) \\ u_1(0) &= 0, \quad u_1'(1) g_0(1) = -u_0'(1) c_N^{\Delta g} \end{aligned} \tag{17}$$

КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Каноническая система для задачи (9):

$$\begin{cases} u' = \sigma/g \\ \sigma' = -\kappa^2 r u \\ u(0) = 0, \quad \sigma(1) = 1 \end{cases} \quad (18)$$

Вспомогательная задача Коши имеет вид

$$\begin{cases} \tilde{u}' = \tilde{\sigma}/g \\ \tilde{\sigma}' = -\kappa^2 r \tilde{u} \\ \tilde{u}(0) = 0, \quad \tilde{\sigma}(0) = 1 \end{cases} \quad (19)$$

а решение строится в виде $u = \alpha \tilde{u}$, $\sigma = \alpha \tilde{\sigma}$,
где $\alpha = 1/\tilde{\sigma}(1)$ – пристрелочный параметр.

КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Каноническая система для неоднородной задачи (12):

$$\begin{cases} u_1' = \sigma_1/g_0 \\ \sigma_1' = -\kappa^2 r_0 u_1 + F \\ u_1(0) = 0, \quad \sigma_1(1) = -g_1(1) u_0'(1) \end{cases} \quad (20)$$
$$F = -(u_0' g_1)' - \kappa^2 r_1 u_0$$

Для ее решения рассмотрим еще одну вспомогательную задачу Коши

$$\begin{cases} \hat{u}_1' = \hat{\sigma}_1/g_0 \\ \hat{\sigma}_1' = -\kappa^2 r_0 \hat{u}_1 + F \\ \hat{u}_1(0) = 0, \quad \hat{\sigma}_1(0) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Решение (20) строится в виде $u_1 = \hat{u}_1 + \beta \tilde{u}$, $\sigma_1 = \hat{\sigma}_1 + \beta \tilde{\sigma}$, где $\beta = -[g_1(1) u_0'(1) + \hat{\sigma}_1(1)] / \tilde{\sigma}(1)$.

НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА

При решении (20) используется сплайн аппроксимация численно найденной функции u_0 .

Каноническая система для неоднородной задачи (16):

$$\begin{cases} u_1' = \sigma_1/g_0 \\ \sigma_1' = -\kappa^2 r_0 u_1 - \left(u_0' \sum_{s=0}^N c_s^{\Delta g} \varphi_s(x) \right)' - \kappa^2 \left(\sum_{s=0}^N c_s^{\Delta r} \varphi_s(x) \right) u_0 \\ u_1(0) = 0, \quad \sigma_1(1) = -c_N^{\Delta g} u_0'(1) \end{cases} \quad (22)$$

НАХОЖДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Задача (20) линейно зависит от правой части F и ее решение строится в виде

$$u_1 = \sum_{s=0}^N c_s^{\Delta g} u_{1s}^g + \sum_{s=0}^N c_s^{\Delta r} u_{1s}^r$$

u_{1s}^g – решение (20) при $g_1 = \varphi_s(x)$, $r_1 = 0$,

u_{1s}^r – решение (20) при $g_1 = 0$, $r_1 = \varphi_s(x)$.

На основе соотношения $u_1(\xi) \approx f - u_0(\xi)$ составляется СЛАУ для нахождения неизвестных коэффициентов $c_s^{\Delta g}$, $c_s^{\Delta r}$, $s = 0..N$.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Частный случай $\xi = 0.79$, $N = 1$, $r_1 = 0$

$$\begin{aligned} (u_1' g_0)' + \kappa^2 r_0 u_1 &= -c_0^{\Delta g} (u_0' \varphi_0)' - c_1^{\Delta g} (u_0' \varphi_1)' \\ u_1(0) = 0, \quad u_1'(1) g_0(1) &= -u_0'(1) c_2^{\Delta g} \end{aligned} \quad (23)$$

κ_1, κ_2 — две точки на АЧХ.

$$u_1 = c_0^{\Delta g} u_{10} + c_1^{\Delta g} u_{11}$$

$$\begin{cases} \kappa = \kappa_1 : & u_1(\xi, \kappa) \approx f(\kappa) - u_0(\xi, \kappa) \\ \kappa = \kappa_2 : & u_1(\xi, \kappa) \approx f(\kappa) - u_0(\xi, \kappa) \end{cases}$$

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Итерационный алгоритм:

- ▶ Начальное приближение ($g_0(x) = g_0 = \frac{1}{f(0)}$)
- ▶ Поиск поправки в классе линейных функций
(пока очередная линейная поправка не будет по норме меньше 0.01)
- ▶ Поиск поправок в классе квадратичных функций
(пока очередная поправка не будет по норме меньше 0.01)

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

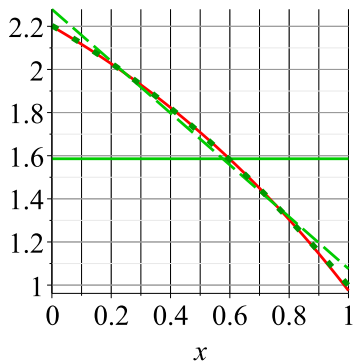
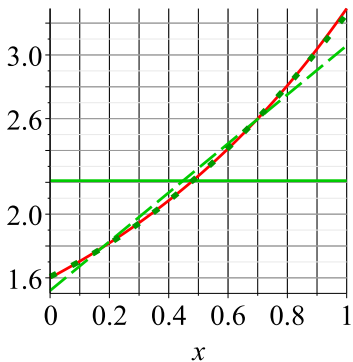
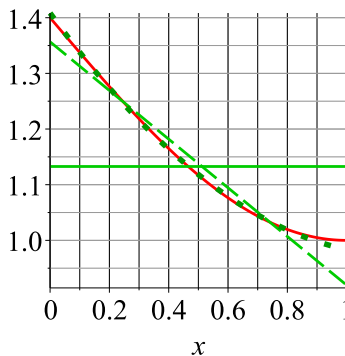


Рис.: Точная функция, начальное приближение, линейный и квадратичный результат восстановления

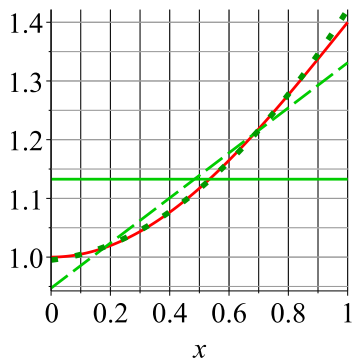
$$0.6 + e^x$$

$$3.2 - e^{0.8x}$$

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

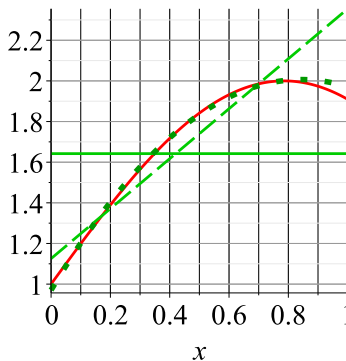


$$1.4 - 0.4 \cos(\pi(1-x)/2)$$

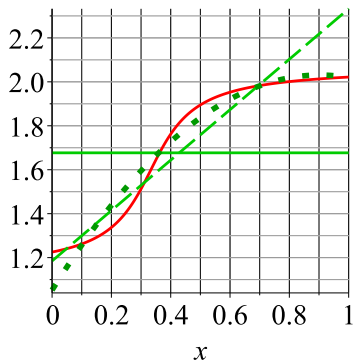


$$1.4 - 0.4 \cos(\pi x/2)$$

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

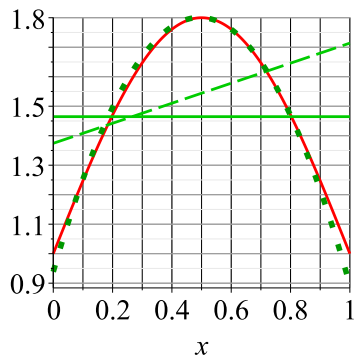


$$1 + \sin(2x)$$

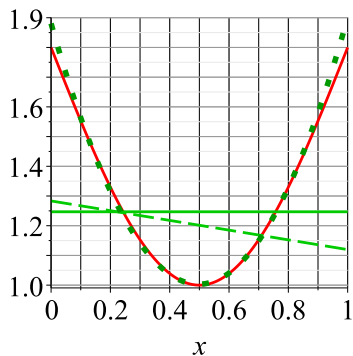


$$1.6 + 0.3 \arctan(3(3x - 1))$$

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ



$$1 + 0.8 \sin(\pi x)$$



$$1.8 - 0.8 \sin(\pi x)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- ▶ Точность повышается при $\xi \rightarrow 1$.
- ▶ При $\xi < 0.5$ схема перестает работать.
- ▶ Малая линейная поправка находится с высокой точностью за одну итерацию.
- ▶ Без линейного начального приближения случай $N = 2$ требует регуляризации системы.

Спасибо за внимание!

vyurov@sfedu.ru

О РЕКОНСТРУКЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА ПО АЧХ, ИЗМЕРЕННОЙ ВНЕ ОБЛАСТИ НАГРУЖЕНИЯ

Ватульян А.О., Юров В.О.

Южный математический институт ВЦ РАН, Владикавказ, Россия

22-24 ноября, 2023